Martins COLÉGIO-CURSO

BANCO DE EXERCÍCIOS - 24 HORAS

• 9º ANO ESPECIALIZADO/CURSO – ESCOLAS TÉCNICAS E MILITARES •

• FOLHA Nº 04 – GABARITO COMENTADO •

1) Sabendo que $O \times B \times M = 240 \Leftrightarrow O \times B = \dfrac{240}{M} \Leftrightarrow B \times M = \dfrac{240}{O}$,

$$O \times B + M = 46 \Leftrightarrow \frac{240}{M} + M = 46 \Leftrightarrow M^2 - 46M + 240 = 0 \Leftrightarrow M = 6 \text{ ou } M = 40 \text{ e}$$

$$O + B \times M = 64 \Leftrightarrow O + \frac{240}{O} = 64 \Leftrightarrow O^2 - 64O + 240 = 0 \Leftrightarrow O = 4 \text{ ou } O = 60.$$

Sendo O, B e M inteiros, a única possibilidade é O = 4, M = 6 e B = $\dfrac{240}{4 \times 6} = 10$.

Assim, O + B + M = 4 + 10 + 6 = 20

OPÇÃO B

2) Para obtermos a maior diferença possível devemos tomar o maior e o menor primo cuja soma seja 126. Como 123 = 3 . 41, 121 = 112, 119 = 7 · 17, 115 = 5 · 23, tal representação é 113 + 13, cuja diferença é 113 – 13 = 100.

OPÇÃO B

3) Sendo $n = 2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ a fatoração canônica de *n*, temos $2n = 2^{a+1} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$. Assim, a quantidade de divisores positivos de *n* é $(a+1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$ e a quantidade de divisores positivos de 2*n* é $(a+1+1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$. Essa quantidade é o dobro da anterior quando $(a+2)(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1) = 2(a_1+1)\ldots(a_k+1) \Leftrightarrow \alpha+2 = 2(\alpha+1) \Leftrightarrow \alpha = 0$. Isso quer dizer que *n* não tem fatores 2, ou seja, *n* é ímpar.

OPÇÃO C

4) Sejam *p* . *q* números primos, então para que o número de divisores inteiros e positivos seja exatamente 15, os número precisam ser da seguinte forma: p^{14} e $p^2 . q^4$.

Assim teremos as seguintes possibilidades: $2^2 . 3^4 = 324$, $3^2 . 2^4 = 144$ e $5^2 . 2^4 = 400$.

OPÇÃO D

5) O tabuleiro contém 95 x 95 = 9025 casas. Nas linhas ímpares, a sequência é crescente e nas linhas pares, é decrescente. Portanto, na 95ª linha, a última casa da direita apresenta o maior múltiplo de 4 no tabuleiro, ou seja, Sara escreveu na casa U o número 9025 x 4 = 36100.

OPÇÃO C

6) Pelo critério de divisibilidade por 8, os três últimos dígitos devem formar um número múltiplo de 8. A única opção admissível é z = 4. Pelo critério de divisibilidade por 11, (x + 2 + z) – (y + 6) = x – y deve ser divisível por 11. Como x e y são dígitos, a única opção é x = y. Finalmente, pelo critério de divisibilidade por 9, (x + y + 2 + 6 + z) = 2x + 12 deve ser divisível por 9. O único dígito que satisfaz tal condição é x = 3.

OPÇÃO A

7) Como 2014 = 53 . 19 . 2, segue que $a^2 + b^2$ é um de seus 8 divisores. Os possíveis restos de um quadrado perfeito na divisão por 19 são: 0,1,4,5,6,7,9,16. A única soma de dois deles que produz um múltiplo de 19 é a soma 0 + 0. Assim, se $a^2 + b^2$ é múltiplo de 19, a e b também o são. Dado que 2014 não possui dois fatores de tal primo, podemos concluir que deve ser um divisor de 53 . 2. As possibilidades são:

$a^2 + b^2 = 2 \rightarrow (1,1)$

$a^2 + b^2 = 53 \rightarrow (7,2)$ e $(2,7)$

$a^2 + b^2 = 106 \rightarrow (5,9)$ e $(9,5)$

OPÇÃO E

8) $a2^b - 3 = 17 \to a2^b = 20$
$a4^b - 3 = 77 \to a2^{2b} = 80$, dividindo uma equação pela outra temos:
$2^b = 4 \to b = 2$, logo $a = 5$
$N = (5 + 1)^3 . 2^5 \to N = 2^3 . 3^3 . 2^5 \to N = 2^8 . 3^3$, logo o número de divisores é $(8 + 1) . (3 + 1) = 36$

OPÇÃO B

9) $N = 2^4 . 3^5 . 5^6$, como queremos os múltiplos de 10, $N = 10.(2^3 . 3^5 . 5^5)$
Total de divisores: $(3 + 1).(5 + 1).(5 + 1) = 4 . 6 . 6 = 144$

OPÇÃO D

10) O primeiro múltiplo de 12 na sequência é 360 e o último é 3576. Para encontrarmos os números intermediários da nossa sequência, basta somarmos 12 ao número anterior.
{360, 372, 384...3576}
Sequências desse tipo são chamadas de aritméticas.
Vamos utilizar a expressão do termo geral para sequências aritméticas.
$a_n = a_1 + (n - 1), r$
a_n = último termo
a_1 = primeiro termo
n = número de termos
r = razão entre os termos
$a_n = a_1 + (n - 1) . r$
$3576 = 360 + (n - 1) . 12$
$3576 = 360 + 12n - 12$
$3576 = 348 + 12n$
$3576 - 348 = 12n$
$3228 = 12n$
$n = 3228 / 12$
n = 269 múltiplos
OPÇÃO B

11) Para calcularmos a quantidade de divisores de um número, devemos fatorá-los em números primos, somar uma unidade a cada expoente e multiplicar os resultados. Para que um número tenha exatamente 4 divisores positivos, sua fatoração em primos deve ser da forma *pq* ou p^3, onde *p* e *q* são primos distintos. Daí, os números de 1 a 30 que possuem exatamente 4 divisores são os seguintes:
$6 = 2.3$, $10 = 2.5$, $14 = 2.7$, $22 = 2.11$, $26 = 2.13$, $15 = 3.5$, $21 = 3.7$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$.
Temos, então, 9 números.

OPÇÃO D

12) Fazendo $x = t \times y$, a equação inicial reduz-se a $t^2 + 3^3 c\times(t^2 + t + 4)$.
Logo, devemos ter $(c - 1)t^2 + ct + (4c - 3) \leq 0$, para todo t real. Para isto, devemos ter $c - 1 < 0$ e o discriminante $\Delta = c^2 - 4\times(c - 1)\times(4c - 3) \leq 0$.
Da última inequação, obtemos $-15c^2 + 28c - 12 \leq 0$, cuja solução é $c \leq \frac{2}{3}$ ou $c \geq \frac{6}{5}$. Como $c < 1$, o maior valor possível de c é 2/3. Daí, $2009\times c = 1339{,}333...$.

OPÇÃO A

13) Observando que $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz$,

$$\begin{cases} x+y+z=77 \\ xy+yz+zx+xyz=946 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=77 \\ 1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz=1024 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)+(1+y)+(1+z)=80 \\ (1+x)(1+y)(1+z)=1024=2^{10} \end{cases}$$

Como *x, y* e *z* são inteiros não negativos, $1 + x$, $1 + y$ e $1 + z$ são potências de 2. Considerando que $80 = 2^6 + 2^4 > 3\times2^4$, $80 < 2^7$ e $x \leq y \leq z$, temos $2^4 < 1 + z < 2^7$, ou seja, $1 + z = 2^5 = 32$ ou $1 + z = 2^6 = 64$.
Se $1 + z = 32$, temos $1 + x + 1 + y = 48$ e $(1 + x)(1 + y) = 2^5 = 32$. Mas, sendo $1 + x$ e $1 + y$ potências de 2 com soma

par, temos $1 + x^3$ 2 e, portanto, $1 + y \le 16$. Então $1 + x \le 16$ e $1 + x + 1 + y \le 32 < 48$, e não há soluções nesse caso.
Se $1 + z = 64$, temos $1 + x + 1 + y = 16$ e $(1 + x)(1 + y) = 2^4 = 16$. Desse modo, $1 + x$ e $1 + y$ são soluções da equação do segundo grau $t^2 - 16t + 16 = 0$, que não tem soluções inteiras.
Logo não há soluções.

OPÇÃO A

14) Dividindo tudo por x^8: $1 + 3\dfrac{y^4}{x^8} = 4\dfrac{y^3}{x^6} \Leftrightarrow 3\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^4 - 4\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^3 + 1 = 0$. Seja $z = \dfrac{y}{x^2}$: $3z^4 - 4z^3 + 1 = 0$. Fatorando, teremos $(z-1)^2(3z^2 + 2z + 1) = 0$. A única raiz racional dessa equação é Z = 1 , portanto deveremos ter $y = x^2$ para satisfazer a equação com x e y inteiros positivos. Pela limitação $1 \le y \le 2007$, y pode assumir todos os valores de quadrados perfeitos nesse intervalo, que são 1^2, 2^2, 3^2, ...44^2, totalizando 44 pares ordenados.

OPÇÃO E

15) $a^5 - 5a^3 + 4a = a(a^4 - 5a^2 + 4) = a(a^2 - 4)(a^2 - 1) = (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$
este resultado é o produto de 5 números consecutivos onde $a > 2$, que é divisível por 60.

OPÇÃO D

16) Seja $x = 20112007$. A expressão do problema é equivalente à:
$(x + 4)^2 + (x - 4)^2 - 16x = 2x^2 - 16x + 32$
$= 2(x^2 - 8x + 16)$
$= 2\,(x - 4)^2$
Ou seja, 2.20112003^2.

OPÇÃO B

17) $\begin{cases} 3x - y - 10z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \; (-3) \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - y - 10z = 0 \\ -3x - 6y + 3z = 0 \end{cases}$

Somando as equações encontramos $y = -z$ e $x = 3z$

Substituindo,

$$\frac{(3z)^3 + (3z)^2(-z)}{(3z).(-z)^2 - z^3}$$

$$\frac{27z^3 - 9z^3}{3z^3 - z^3}$$

$$\frac{18z^3}{2z^3} = 9$$

OPÇÃO B

18) $\dfrac{(x^2 - 6x^2 + 12x - 8)^{16} + 2x^2 - 8x + 1 + k}{x^2 - 4x + 4}$

$$\frac{\left[(x-2)^2\right]^{16} + 2x^2 - 8x + 1 + k}{x^2 - 4x + 4}$$

Como a divisão é exata, os polinômios devem ser múltiplos entre si. Para isso basta compararmos o polinômio de grau 2 do numerador com o do denominador.
Percebemos que os coeficientes desses dois polinômios são múltiplos entre si, logo:
$1 + k = 2 \text{ x } 4$
$1 + k = 8 \rightarrow k = 7$

OPÇÃO D

19) $(a^2 - 2ab - b^2) \geq 0$

$(a^2 - 2ab - b^2 + b^2 - b^2) \geq 0$

$(a^2 - 2ab + b^2 - 2b^2) \geq 0$

$(a - b)^2 - 2b^2 \geq 0$

$(a - b)^2 \geq 2b^2$

$a - b \geq b\sqrt{2}$

$a \geq b\sqrt{2} + b$

$a >\_\ b\,(\sqrt{2} + 1)$

$\frac{a}{b} \geq 1 + \sqrt{2}$

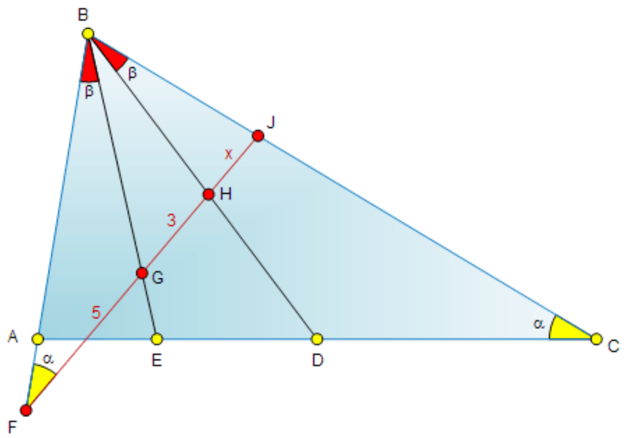
OPÇÃO A

20) Como $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3(x^2y + xy^2) = 9 + 18 = 27$

$x + y = 3$

OPÇÃO C

21) FGB ~ BDC => FG/DC = BF/BC BFJ ~ ABC => FJ/AC = BF/BC => FG/DC = FJ/AC



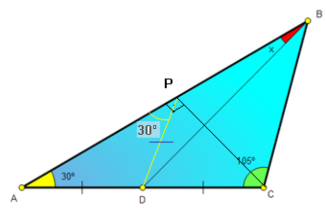
5/0.5 AC = (8+x)/AC => 10 = 8 + x => x = 2

OPÇÃO D

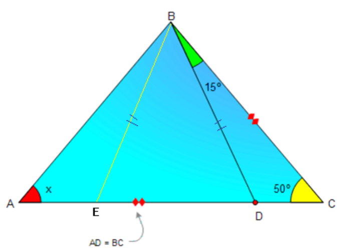
22) Observe que na figura, o ângulo PBC tem 45°, bem como o PCB, e o triângulo DPC é equilátero,pois DP é a mediana relativa à hipotenusa. Como PD = PB e o ângulo APD ,

Conclui-se que $x = 15°$

OPÇÃO C



23) Marque o ponto E sobre AC e trace BE tal que BC = CE. Observe que AE = CD e o ângulo AEB = 115 = ângulo BDC que faz BE = BD.

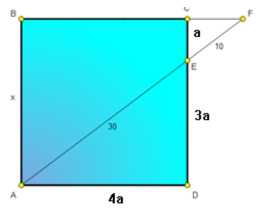


Os triângulos ABE CBD são congruentes (lado ângulo lado). logo; $x = 50°$

Suplemento: $180 - 50 = 130°$

OPÇÃO D

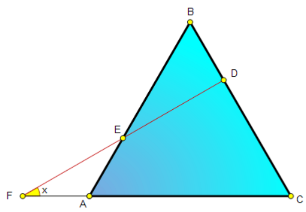
24) $5a = 30$ daí; $a = 6$.



Como $AB = AD = 4a = 24$ cm

OPÇÃO C

25) O ângulo DBE é de 60° e o lado BE vale o dobro de BD, pode–se afirmar que o Triângulo AEF é isóscele.



Daí, $x = 30°$

OPÇÃO C

26) O prolongamento de AD intersecta BC perpendicularmente.

Pois o ângulo $C = 90 - x$.

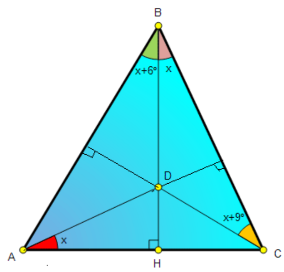
Observe que o ponto D é o ortocentro do triângulo ABC.

Logo: $2x + 9 + x + 6 = 90$.

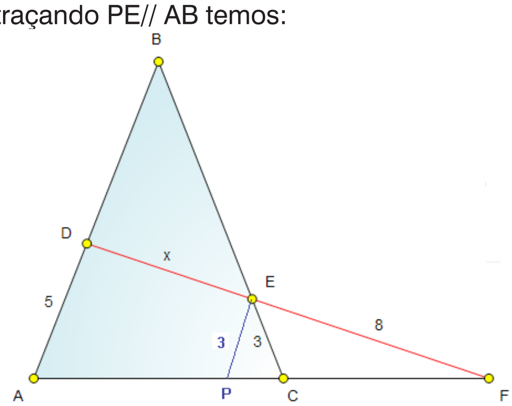
Ou seja: $3x = 75 \rightarrow x = 25°$

$90 - 25 = 65°$

OPÇÃO A



27) Como o triângulo ABC é isóscele, traçando PE// AB temos:

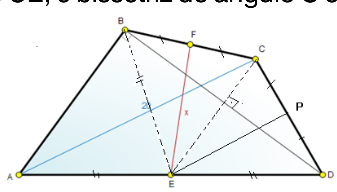


$$\frac{3}{5} = \frac{8}{8+x} \rightarrow x = \frac{16}{3}$$

OPÇÃO B

28) Como o triângulo BCD é isóscele, temos que CE, é bissetriz do ângulo C e os triângulos CEF e CEP, são congruentes.

Daí; $PE = FE = \dfrac{AC}{2} = 10$



OPÇÃO A

29) Como os lados dos ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{P}C$ determinam o mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$, segue que $B\hat{A}P \equiv B\hat{P}C = 60°$.

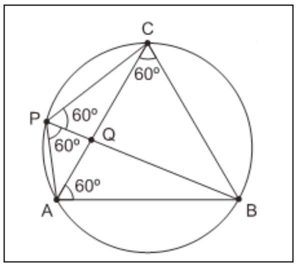
Aplicando a lei dos cossenos no triângulo APC, obtemos

$$\overline{AC}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 - 2 \cdot \overline{PA} \cdot \overline{PC} \cdot \cos A\hat{P}C \Rightarrow$$

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \underbrace{\cos 120°}_{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \overline{AC}^2 = 148 \Rightarrow \overline{AC} = 2\sqrt{37}.$$

Como PQ é bissetriz de $A\hat{P}C$, vem que $\overline{PQ} = \dfrac{2}{\overline{PA} + \overline{PC}} \cdot \sqrt{\overline{PA} \cdot \overline{PC} \cdot p \cdot (p - \overline{AC})}$, com $p = \dfrac{\overline{PA} + \overline{PC} + \overline{AC}}{2}$.

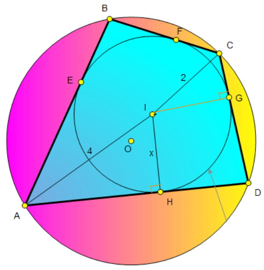
Desse modo, $p = \dfrac{6 + 8 + 2\sqrt{37}}{2} = 7 + \sqrt{37}$



$$
\begin{aligned}
\text{e } \overline{PQ} &= \frac{2}{6+8} \cdot \sqrt{6 \cdot 8 \cdot (7 + \sqrt{37}) \cdot (7 + \sqrt{37} - 2\sqrt{37})} \\
&= \frac{1}{7} \cdot \sqrt{16 \cdot 3 \cdot (7 + \sqrt{37}) \cdot (7 - \sqrt{37})} \\
&= \frac{1}{7} \cdot \sqrt{16 \cdot \underbrace{3 \cdot 12}_{36}} \\
&= \frac{1}{7} \cdot 4 \cdot 6 \\
&= \frac{24}{7}.
\end{aligned}
$$

OPÇÃO A

30) Observe que $CG = \sqrt{4 - x^2}$ e que $AHI \sim CGI$ logo;



$x = 2\sqrt{4 - x^2}$ Daí, $x = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

OPÇÃO C